Министерство науки и высшего образования РФ
Соликамский государственный педагогический институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Утверждено на заседании
Ученого совета СГПИ филиала ПГНИУ
Протокол № 10
от «14» октября 2021

Утверждено на заседании
кафедры математических и естественнонаучных
дисциплин СГПИ филиала ПГНИУ
Протокол № 2
от «05» октября 2021

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН
ПО ОСНОВАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Цель проведения вступительного экзамена по основам математического анализа – оценить уровень теоретической и практической подготовки абитуриентов в области теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной.

Задачи проведения вступительного экзамена по основам математического анализа:

– выявить уровень усвоения основных понятий и методов теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной;

– оценить навыки применения теоретических понятий и практических методов математического анализа для решения задач.

В результате прохождения вступительного экзамена абитуриенты должны *знать:*

– числовые последовательности и пределы;

– основы дифференцирования и интегрирования;

– правила нахождения производных и интегралов;

уметь:

– находить пределы последовательностей и пределы функций;

– вычислять производные элементарных функций;

– использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков;

– применять производную для проведения приближенных вычислений,

– решать задачи прикладного характера на нахождение наибольшего и наименьшего значения;

– вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла.

2. ТРЕБОВАНИЯ К ВСТУПИТЕЛЬНОМУ ЭКЗАМЕНУ

2.1 Содержание программы вступительного экзамена

ТЕМА 1. Последовательности. Предел последовательности. Предел функции.

Последовательности. Предел последовательности. Вычисление предела последовательности. Предел функции в точке. Основные свойства предела. Предел функции в точке и на бесконечности. Первый и второй замечательный пределы. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Свойства непрерывных функций.

ТЕМА 2. Понятие о производной. Правила вычисления производной функции.

Производная, её геометрический и механический смысл. Производные суммы, произведения и частного двух функций. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.

ТЕМА 3. Производная сложной функции.

Правило дифференцирования сложной и обратной функций. Производная тригонометрических и обратных тригонометрических функций. Производные показательной, логарифмической функций. Вторая производная, ее физический смысл.

ТЕМА 4. Исследование функции с помощью производной.

Признаки возрастания и убывания функции. Экстремум функции. Исследование функции на экстремум. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. Применение производной к построению графиков функции. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции с помощью производной.

ТЕМА 5. Неопределенный интеграл

Первообразная. Неопределенный интервал и его свойства. Нахождение неопределённого интервала. Приложение неопределённого интервала к решению прикладных задач.

ТЕМА 6. Определенный интеграл

Определённый интеграл и его геометрический смысл. Основные свойства определённого интеграла. Способы вычисления определённого интеграла

ТЕМА 7. Площадь криволинейной трапеции определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Применения интеграла

Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла. Вычисление объёмов тел вращения. Решение прикладных задач с помощью определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Примеры применения формулы Ньютона-Лейбница. Вычисление объемов тел.

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ

Продолжительность экзамена – 60 минут.
Количество заданий – 20.
Экзамен проводится в тестовой форме.
Максимальное количество баллов – 100 (табл. 1).
Минимальное количество баллов – 40.

Таблица 1

Максимальное количество баллов за выполнение каждого задания

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7

Задание считается выполненным, если ответ удовлетворяет следующим критериям:
– правильно выбран способ решения задачи;
– даны точные определения необходимых терминов;
– получен правильный ответ.

Примеры экзаменационных заданий (с решениями)

Задание 1

Найти предел последовательности $a_n = \frac{n+1}{3n+1}$

Решение

Преобразуем формулу для общего члена к виду: $a_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}$

Учитывая, что последовательность стремится к нулю при $n \to \infty$, и используя теоремы об арифметических свойствах пределов, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\square 1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\square 1}{n}} = \frac{1}{3}$$

Задание 2

Найти предел функции:

$\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2+1\right)$

Решение

$$\lim_{x\to 1}(2x^2+1) = \lim_{x\to 1} 2x^2 + \lim_{x\to 1} 1 = 2\ (\lim_{x\to 1} x)^2 + 1 = 2+1 = 3$$

Задание 3

Найти производную функции y=sinx

Решение

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x$$

Задание 4

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=6t^2-48t+17$ (где *x* — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени t = 9 с.

Решение

Найдем закон изменения скорости: $v(t)=x'(t)=12t-48$

При t = 9 с имеем: $v(9)=12\cdot 9-48=60$ м/с

Задание 5

Найти предел последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}$$

Решение

Воспользуемся формулами: разность квадратов ($a^2-b^2=(a-b)(a+b)$)и квадрат суммы ($(a+b)^2=\ a^2+2aba^2+b^2$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n}{n^2+6n+9}=0$$

Задание 6

Найти предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}$$

Решение

Так как

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}=0,\lim_{x\to 0}x=0$$

то, здесь имеем неопределенность вида .

Для того, чтобы раскрыть эту неопределенность, преобразуем дробь, стоящую под знаком предела, умножив числитель и знаменатель этой дроби на $\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}$ и сделав после чего необходимые упрощения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}\right)\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}{x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4-x-(4+x)}{x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)} =$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}} = -\frac{1}{2}$$

Задание 7

Размер популяций в момент t (время выражено в часах) задается формулой p(t)=3000+t^2. Найти скорость роста популяции в момент t=5.

Решение

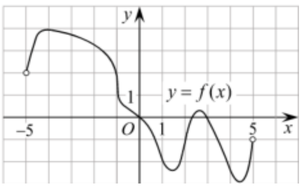
$$p'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{3000+100(t+\Delta t)^2-3000-100t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{100(2t+\Delta t)\Delta t}{\Delta t} = 100\lim_{\Delta t\to 0}(2t+\Delta t) = 200t$$

При t=5 скорость роста бактерий составляет 1000 бактерий в час.

Задание 8

На рисунке изображен график функции y = f(x), определенной на интервале (−5; 5). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y = 6 или совпадает с ней.



Решение

Поскольку касательная параллельна прямой y = 6 или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны 0. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания. У данной функции производная равна нулю только в точках экстремума функции. На заданном интервале функция имеет 2 максимума и 2 минимума, итого 4 экстремума. Таким образом, касательная к графику функции параллельна прямой y = 6 или совпадает с ней в 4 точках.

Задание 9

Найти предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg\,3x}$$

Решение

Так как эквивалентными бесконечно малыми являются $\sin 5x \sim 5x$ и $tg\,3x \sim 3x$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg\,3x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$$

Задание 10

Вычислить $\sqrt{16{,}02}$

Решение

Взяв функцию $f(x)=\sqrt{x}$, имеем $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Полагая $x=16,\quad \Delta x=0,02$, получаем:

$\sqrt{16,02}=\sqrt{16}+\frac{1}{2\sqrt{16}}0,02=4+\frac{1}{8}0,02=4+0,0025=4,0025$

Задание 11

Найти предел функции:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{sinx}$

Решение

Согласно правилу Лопиталя

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{sinx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{[(2]^x-1)'}{([sinx)]'}==\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{x\square}ln2}{\cos x}=ln2$

Задание 12

Найти интеграл

$\int sin^2 3xdx$

Решение

$\int sin^2 3xdx=\frac{1}{2}\int(1-cos6x)dx=$

Задание 13

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2x^3-3x^2-4$ на отрезке [0;2].

Решение

Найдем производную:

$y'=6x^2-6x$

Приравниваем производную к нулю. Решаем уравнение и получаем критические точки: $x_1=0$, $x_2=1$.

Вычислим значения функции в критических точках и на концах промежутка:

$y(0)=-4$

$y(1)=-5$

$y(2)=0$

Среди полученных значений наименьшее –5, наибольшее 0.

Задание 14

Составить уравнения касательных в точках пересечения окружности $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ с осью Ox

Решение

Решая совместно уравнение окружности $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ и уравнение оси Ox, y=0, находим ее точки пересечения: A(–1;0), B (3;0).

Дифференцируя по x уравнение окружности $2x+2yy'-2+4y'=0$, находим производную

$$y' = \frac{1-x}{2+y}$$

и вычисляем ее значения для точек A и B:

$$y' = -1$$

Составим уравнения касательных:
для точки A: $x-y+1=0$;
для точки B: $x+y-3=0$.

Задание 15

Найти производную функции

$$R = (x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}$$

Решение

Прологарифмируем обе части уравнения $R = (x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}$

$$lnR = \ln(x-1) + \frac{2}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{3}\ln(x-2)$$

Продифференцируем обе части полученного равенства

$$\frac{R'}{R} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{3(x+1)} + \frac{1}{3(x-2)} = \frac{2x^2-3x-1}{(x^2-1)(x-2)}$$

Заменим y его выражением через x и определим y'

$$R' = \frac{2x^2-3x-1}{(x^2-1)(x-2)}(x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)} = \frac{2x^2-3x-1}{\sqrt[3]{(x+1)(x-[2)]^2}}$$

Задание 16

Точка движется по кубической параболе $12y=x^3$. Какая из ее координат изменяется быстрее?

Решение

Считая в уравнении параболы y сложной функцией от времени t и дифференцируя его по t, получим:

$$12\frac{dy}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$$

Отсюда найдем отношение скоростей изменения ординаты и абсциссы:

$$\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{4}$$

При $|x| < 2$ это отношение будет меньше единицы,
при $|x| = 2$ – равно единице,
при $|x| > 2$ оно будет больше единицы.
Следовательно:

1) при $-2<x<2$ ордината изменяется медленнее абсциссы;

2) при $x = \pm 2$ скорости изменения абсциссы и ординаты одинаковы;
3) при $x<-2$ и $x>2$ ордината изменяется быстрее абсциссы.

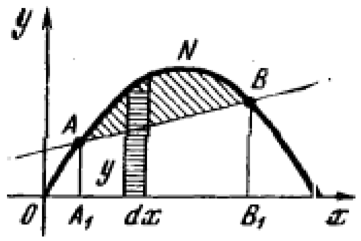
Задание 17

Вычислить площадь, ограниченную параболой $4y=8x-x^2$ и прямой $4y=x+6$

Решение

Совместно решая данные уравнения, определим две точки пересечения линий, ограничивающих искомую площадь, A(1; 7/4), B(6; 3).

Построив эти точки и проходящие через них данные линии, видим, что искомая площадь ANB равна разности площадей $S_1=A_1ANBB_1$ и $S_2=A_1ABB_1$



$S_1 = y\,dx = 4 \quad 8x - x \quad dx = 4 \quad 4x - 3 \Big|_1^6$

$= \frac{205}{12}$

Площадь S_2 трапеции A_1ABB_1 равна произведению полусуммы ее оснований на высоту:

$$S_2 = \frac{A_1A + B_1B}{2} \cdot A_1B_1 = \frac{95}{8}$$

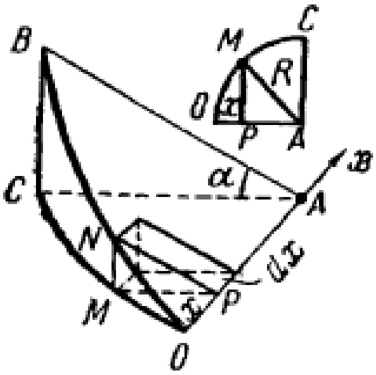
Следовательно, искомая площадь

$$S = S_1 - S_2 = \frac{205}{12} - \frac{95}{8} = 5\frac{5}{24}$$

Задание 18

Найти объём части цилиндра, отсеченной плоскостью, которая проходит через диаметр 2R его основания под углом α к плоскости основания.

Решение



Изобразив половину данного тела, заметим, что всякое сечение его плоскостью, параллельной плоскости ABC, представляет прямоугольный треугольник.

Найдем площадь сечения, отстоящего от точки O на расстоянии OP=x.

Из прямоугольного треугольника AMP имеем

$$MP^2 = R^2 - (R-x)^2$$

Из прямоугольного треугольника PNM имеем MN= MP tg α

Площадь сечения *S(x),* как прямоугольного треугольника с катетами MP и MN:

$$S(x) = \frac{1}{2}MP \cdot MN = \frac{1}{2}MP^2 tg\alpha = \frac{1}{2} ((R)^2 - (R-x)^2) tg\alpha = \frac{1}{2} (Rx - x^2) tg\alpha$$

При изменении *x* на величину *dx* объём v изменится на величину *Δv,* эквивалентную объёму прямого цилиндра с высотой *dx* и площадью основания *S(x):*

$$\Delta v \approx dv = S(x)dx = \frac{1}{2} ((2Rx - x)^2) tg\alpha dx$$

Всему искомому объёму соответствует изменение *x* от 0 до 2R, поэтому:

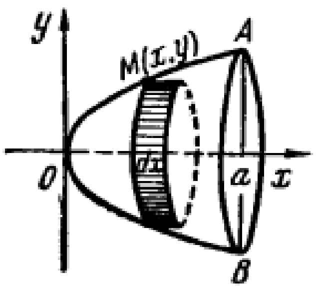
$$V = \frac{tg\alpha}{2}\int_0^{2R} ((2Rx - x)^2)dx = \frac{tg\alpha}{2} \left(Rx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{2R}$$

Задание 19

Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y^2=2px$, $x=a$ вокруг оси *Ox*

Решение

Построив параболу $y^2=2px$ и прямую $x=a$, получим параболический сегмент OAB.



При вращении его вокруг оси *Ox* образуется сегмент параболоида вращения.

$$V = \pi\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx = \pi\int_0^{a} 2px dx = \pi px^2 \Big|^{2R}$$

Задание 20

Найти размеры цилиндрической закрытой цистерны с заданным объёмом v и с наименьшей полной поверхностью.

Решение

Обозначив радиус и высоту цилиндра через r и h, а его полную поверхность через s, получим:

$s=2\pi rh+2\pi r^2$

Здесь переменные r и h не являются независимыми, а связаны между собой равенством $v=\pi r^2h$, т.к. согласно условию цилиндр должен иметь заданный объём v.

Определяя из этого равенства h и подставляя в выражение полной поверхности, получим:

$s=2\left(\pi r^2+\frac{v}{r}\right)$, где r изменяется в интервале $0<r<+\infty$

Выразив таким образом исследуемую полную поверхность цилиндра s через одну переменную r, найдем теперь ее наименьшее значение при изменении r в интервале $(0;+\infty)$.

Найдем критические точки:

$$s'=2\left(2\pi r-\frac{v}{r^2}\right)=2\frac{2\pi r^3-v}{r^2}$$

$s'=0$ в единственной точке $r=\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$, которая лежит в рассматриваемом интервале.

Исследуем найденную критическую точку по знаку второй производной в этой точке:

$$s''=4\left(\pi+\frac{v}{r^3}\right);s''\left(\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}\right)=12\pi>0,$$

откуда следует, что критическая точка $r=\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ есть точка минимума.

Функция s(r) непрерывна в интервале $(0;+\infty)$, поэтому единственный минимум функции s в интервале $(0;+\infty)$ совпадает с ее наименьшим значением в этом интервале.

При $r=\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ получим $h=\frac{v}{\pi r^2}=2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}=2r$

Следовательно, цилиндрическая закрытая цистерна, имеющая заданный объём, будет иметь наименьшую полную поверхность, когда ее осевое сечение представляет квадрат.

3. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Баврин, И. И. Математический анализ : учебник и практикум для среднего профессионального образования / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2021. — 327 с.
2. Капкаева, Л. С. Математический анализ: теория пределов, дифференциальное исчисление: учебное пособие для среднего профессионального образования / Л. С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2020. — 246 с.
3. Шипачев, В. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : учебник и практикум для среднего профессионального образования / В. С. Шипачев. — М.: Издательство Юрайт, 2021. — 212 с.

Дополнительная литература

1. Садовничая, И. В. Математический анализ: определенный интеграл в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие для среднего профессионального образования / И. В. Садовничая, Е. В. Хорошилова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2021. — 242 с.
2. Садовничая, И. В. Математический анализ: определенный интеграл в 2 ч. Часть 2 : учебное пособие для среднего профессионального образования / И. В. Садовничая, Е. В. Хорошилова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2021. — 199 с.
3. Садовничая, И. В. Математический анализ. Предел и непрерывность функции одной переменной : учебное пособие для среднего профессионального образования / И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко ; под общей редакцией В. А. Ильина. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2021. — 115 с.
4. Шагин, В.Л. Математический анализ. Базовые понятия: учебное пособие для среднего профессионального образования / В. Л. Шагин, А.В. Соколов.— М.: Издательство Юрайт, 2021. — 245 с.
5. Хорошилова, Е. В. Математический анализ: неопределенный интеграл : учебное пособие для среднего профессионального образования / Е. В. Хорошилова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2021. — 187 с.